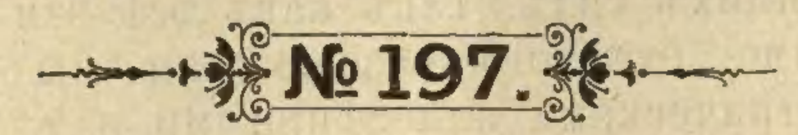
XVII Сем. 1-го октября 1894 г. № 5.

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ
и
ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ.



ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ ЭНЕРГЕТИКИ.

(*Окончаніе* *).

Если бы мы подвергли разсмотрѣнію движеніе въ полѣ нѣкоторыхъ силъ цѣлой совокупности массъ, соединенныхъ между собою неизмѣняемыми связями, то начало сохраненія энергіи въ приложеніи къ этому случаю также должно было бы имѣть мѣсто, а такъ какъ на каждую частицу взятой системы дѣйствовали бы, по предыдущему, силы центральныя, то, слѣдовательно, и на всю систему дѣйствовали бы силы той же категоріи, приложенныя къ центру инерціи взятой неизмѣняемой системы.

Возьмемъ теперь наиболѣе сложный и вмѣстѣ съ тѣмъ наиболѣе общій случай, а именно совокупность массъ, образующихъ систему измѣняемую, находящуюся въ полѣ дѣйствія нѣкоторыхъ силъ. Такая система особенно интересна тѣмъ, что можетъ представлять собою схему всякаго физическаго тѣла. Такъ какъ система измѣняема, то она обладаетъ неизбѣжно сама по себѣ или кинетической, или потенціальной энергіей, или и той и другой вмѣстѣ; назовемъ эту энергію внутренней энергіей системы. Вслѣдствіе того, что разсматриваемая система не изолирована, ея полная внутренняя энергія можетъ измѣняться и начало сохраненія энергіи показываетъ, какъ мы уже замѣтили, что *измѣненію внутренней энергіи системы неизбѣжно соотвѣтствуетъ равное, но противоположное измѣненіе энергіи внѣ системы.* На осно-

*) См. „Вѣстникъ Оп. Физики" № 196.

ваніи предыдущихъ соображеній легко убѣдиться въ томъ, что измѣняемыя связи системы происходятъ отъ внутреннихъ силъ, дѣйствующихъ между каждою парою массъ систему составляющихъ и, въ свою очередь, опредѣляемыхъ только координатами взаимодѣйствующихъ массъ, т. е. зависящихъ лишь отъ разстояній между массами. Если бы силы, дѣйствующія внутри системы, зависили бы не исключительно отъ координатъ взаимодѣйствующихъ массъ, то начало сохраненія энергіи нарушалось бы при измѣненіяхъ, происходящихъ внутри системы. Если бы силы, дѣйствующія на систему извнѣ, не были той же категоріи, то начало сохраненія энергіи нарушалось бы при измѣненіи положенія системы въ полѣ внѣшнихъ силъ. Такъ какъ всѣ эти соображенія имѣютъ значеніе независимо отъ того, назовемъ ли мы разсматриваемыя массы вѣсомыми, электрическими или эфирными и т. д., то на основаніи предыдущихъ выводовъ можно высказать слѣдующее положеніе: *всѣ силы, дѣйствующія въ природѣ, относятся къ категоріи силъ центральныхъ, удовлетворяющихъ началу сохраненія энергіи.* Такая совершенно общая постановка вопроса о силахъ обыкновенно въ курсахъ термодинамики не дѣлается, что является упущеніемъ, справедливо осуждаемымъ Бертраномъ*), который говоритъ: „Матеріальныя частицы дѣйствуютъ на эфиръ и эфиръ—на нихъ. Эти дѣйствія, которыхъ и величина и законъ неизвѣстны, входятъ во всѣ явленія; казалось бы, что они прежде всего должны выступать въ разсужденіяхъ, однако о нихъ даже и не упоминаютъ“. Подчиняя началу сохраненія энергіи процессы, происходящіе въ системахъ эфирныхъ частицъ (напримѣръ процессъ передачи лучистой энергіи отъ солнца къ землѣ) и въ системахъ смѣшанныхъ частицъ—вѣсомыхъ и эфирныхъ (напр. процессъ поглощенія землею солнечной теплоты), мы считаемъ необходимымъ отмѣтить, что подобное расширеніе области примѣненій начала сохраненія энергіи силъ не всѣми открыто высказывается. Бертранъ, указавъ на молчаніе, которымъ обходятъ всѣ вопросы о силахъ, дѣйствующихъ между матеріальными частицами и эфиромъ, задаетъ далѣе вопросъ о томъ, удовлетворяютъ-ли, по крайней мѣрѣ, эти силы тѣмъ условіямъ, при наличности которыхъ начало сохраненія энергіи можетъ быть къ нимъ приложено и, отвѣчая на этотъ вопросъ, говоритъ: „ничто не дѣлаетъ a priori этого вѣроятнымъ. Шарикъ изъ слоновой кости падаетъ на мраморный полъ, онъ отражается, но не можетъ подняться до начальной высоты—этого не дозволяетъ начало живыхъ силъ. Шарикъ, поднявшись выше точки отправленія, сдѣлалъ бы возможнымъ вѣчное движеніе. Аргументъ имѣетъ видъ не допускающаго возраженій. Щепотка динамита, насыпанная въ мѣстѣ удара, опровергла бы, однако, теорію. Какимъ же образомъ очевидная теорема можетъ оказаться недостаточною? Да просто потому, что послѣ удара,—разница немаловажная,—мраморъ остается, а динамитъ исчезаетъ. Объ этомъ слѣдуетъ поразмыслить. По какому праву невидимый и неизвѣстный эфиръ уподоблять мрамору? Почему не могъ бы онъ участвовать въ явленіяхъ такъ, какъ динамитъ при ударѣ, унося затѣмъ свою уменьшенную энергію? Количество эфира безконечно; нечего бояться, что онъ истощится“.

---

*) Bertrand, Thermodynamique, p VII.

Примѣръ, представленный Бертраномъ, дѣйствительно поучителенъ въ томъ смыслѣ, что указываетъ на необходимость осторожности при созиданіи теорій. Такъ, если бы была построена такая теорія, по которой упругій шарикъ, падая на упругую доску, по отраженіи *ни въ какомъ случаѣ* не могъ бы подняться выше начальнаго положенія, то слѣдовало бы лишь удивляться неправильности такой теоріи, такъ какъ, не прибѣгая даже къ щепоткѣ динамита, представляющей нѣкотораго рода подлогъ, не только потому, что она должна быть подложена подъ шарикъ, но и потому, что ударъ шарика по динамиту мы принимаемъ за ударъ по мрамору—можно множествомъ опытовъ опровергнуть такую теорію. Стоитъ, напр., взять шарикъ изъ мѣди, а подъ мраморной доской помѣстить соленоидъ, по которому пропустить альтернирующій электрическій токъ высокаго напряженіи тотчасъ послѣ удара шарика о доску,—и шарикъ будетъ отброшенъ выше начальнаго положенія. Можно также взять шарикъ желѣзный и, помѣстивъ подъ той точкой, съ которой шарикъ начинаетъ свое паденіе, электромагнитъ, пропустить по обмоткѣ его токъ вслѣдъ за тѣмъ, какъ шарикъ отброшенъ мраморною доскою — и мы вновь увидимъ его взлетѣвшимъ выше начальнаго положенія. Если подобные факты способны подорвать какую либо узкую, односторонне составленную теорію, то они не только не могутъ поколебать начала сохраненія энергіи, но, напротивъ, при ближайшемъ разсмотрѣніи приносятъ этому началу новое подтвержденіе.

Во всѣхъ трехъ описанныхъ случаяхъ кажущагося нарушенія начала живыхъ силъ паденіе шарика происходило вслѣдствіе перехода потенціальной энергіи, зависящей отъ его высоты надъ доскою, въ кинетическую энергію—живую силу. Послѣ отраженія, т. е. перемѣны знака скорости, шарикъ, получалъ избытокъ скорости, а, слѣдовательно, и живой силы, въ первомъ случаѣ подъ вліяніемъ взрыва динамита, т. е. превращенія потенціальной энергіи химической въ кинетическую энергію расширяющихся упругихъ продуктовъ взрыва, во второмъ—кинетическая энергія шарика возрастала вслѣдствіе электродинамическаго отталкиванія, въ третьемъ—вслѣдствіе магнитнаго притяженія; въ обоихъ послѣднихъ случаяхъ опять работала та же патенціальная химическая энергія, если электрическій токъ былъ взятъ изъ гидро-элементовъ.

Не подлежитъ сомнѣнію, что если бы мы могли точно опредѣлить отношеніе между приращеніемъ живой силы шарика и убылью потенціальной химической энергіи, преобразившейся въ эту добавочную живую силу, то мы нашли бы лишь полное равенство между этими величинами.

Изъ того, что эфиръ „невидимъ и неизвѣстенъ“ (правильнѣе не вполнѣ извѣстенъ) вовсе не слѣдуетъ, что подчиненіе его началу сохраненія энергіи — мало вѣроятно. Напротивъ, такое допущеніе необходимо и является не болѣе какъ прямымъ результатомъ обобщенія опытныхъ данныхъ. Въ самомъ дѣлѣ, „дѣйствія матеріальныхъ частицъ на эфиръ и эфира на нихъ входятъ во всѣ явленія“. Всѣ извѣстныя намъ явленія оказываются подчиняющимися началу сохраненія энергіи. Отсюда нельзя сдѣлать другого вывода кромѣ того, что дѣйствія матеріальныхъ частицъ на эфиръ и эфира на нихъ управляются началомъ сохраненія энергіи. Быть можетъ, однако, существуютъ въ природѣ какія

либо процессы, происходящіе въ самомъ эфирѣ, безъ участія матеріальныхъ частицъ, не подчиняющіеся началу сохраненія энергіи? Такъ какъ такіе процессы, по опредѣленію, не имѣютъ никакого отношенія къ матеріи, то они для всего вещественнаго міра ни малѣйшаго значенія имѣть не могутъ и мы о нихъ никогда ничего и не узнаемъ. Держась того мнѣнія, какъ и большинство современныхъ физиковъ, что эфиръ не менѣе матеріаленъ, чѣмъ та матерія, которая можетъ принимать видимую и осязательную форму, мы предпочитаемъ высказать открыто положеніе, вѣроятность котораго нисколько не меньше вѣроятности начала сохраненія матеріи: *при всѣхъ процессахъ распространенія энергіи или ея передачи вѣсомымъ частицамъ количество эфира остается абсолютно неизмѣннымъ.* Въ самомъ дѣлѣ, *о возможности создать или уничтожить нѣкоторую долю эфира можно было бы говорить лишь въ томъ случаѣ, если бы эфиръ былъ признанъ не сущностью, а формою, въ которой проявляется нѣкоторая сущность. Но тогда „начало сохраненія“ примѣнялось бы къ той сущности, которая проявляется въ формѣ эфира* и мы лишь прибавили бы лишнее звено въ цѣпи производныхъ физическихъ объектовъ.

Итакъ, съ механической точки зрѣнія, начало сохраненія энергіи приводитъ насъ неизбѣжно къ представленію о притягательныхъ или отталкивательныхъ силахъ, дѣйствующихъ между отдѣльными матеріальными или не матеріальными массами, какъ причинѣ существованія энергіи. Отсюда возникаетъ *кинетическая теорія матеріи.* Въ приложеніи къ газообразному состоянію тѣлъ кинетическая теорія дала уже рядъ выводовъ столь же близкихъ къ дѣйствительности, сколь близки къ ней полученные раньше эмпирически такъ называемые опытные законы. Кинетика жидкаго и твердаго состояній еще лишь въ зародышѣ и мы пока не можемъ вывести изъ кинетическихъ отношеній частичнаго строенія матеріи такого основного свойства твердаго тѣла, какъ упругость формы.

Значеніе энергетики и термодинамики заключается, однако, главнѣйшимъ образомъ не въ томъ, что онѣ побуждаютъ разыскивать объясненія физическихъ и химическихъ явленій съ точки зрѣнія гипотезы частичныхъ силъ, а въ томъ, что онѣ даютъ возможность совершенно *независимо отъ какихъ бы то ни было гипотезъ о строеніи матеріи* находить законы, по которымъ происходятъ явленія, и предсказывать новыя явленія, еще не обнаруженныя наблюденіемъ или опытомъ. Возьмемъ примѣръ вліянія давленія на температуру воды. Изъ гипотезы частичнаго строенія матеріи мы не можемъ объяснить той аномаліи, которую представляетъ вода, расширяясь при пониженіи температуры отъ 4°C до 0° и не можемъ также предвидѣть, какія температурныя измѣненія вызоветъ увеличеніе внѣшняго давленія на воду, взятую при температурахъ выше и ниже 4°C. Приложеніе принциповъ термодинамики къ данному случаю привело къ оправдавшемуся на опытѣ выводу, что давленіе нагрѣваетъ воду, если ея температура выше 4°C, и охлаждаетъ, если температура воды ниже 4°C. Далѣе, опытъ свидѣтельствуетъ, что вода при замерзаніи расширится. Какъ повліяетъ на температуру замерзанія давленіе? Гипотеза частичныхъ силъ безсильна рѣшить этотъ вопросъ. Термодинамика рѣшаетъ его опредѣленно: на каждую атмо-

сферу увеличеннаго давленія температура замерзанія воды понижается на 0,0074°C. Эта величена была вычислена и предсказана Джемсомъ Томсономъ. Прямые опыты подтвердили ее вполнѣ, доставивъ число, равное 0.0075°C.

Возьмемъ еще примѣръ. Іодистое серебро извѣстно въ двухъ аллотропическихъ состояніяхъ. При обыкновенной комнатной температурѣ оно является въ видѣ двупреломляющихъ желтоватыхъ кристаловъ гексагональной системы. При нагрѣваніи до 146° іодистое серебро переходитъ въ другое состояніе, характеризуемое меньшею плотностью, краснымъ цвѣтомъ, простой преломляемостью и кубическою системою. Ни одно изъ перечисленныхъ свойствъ іодистаго серебра не можетъ быть объяснено гипотезой частичнаго строенія и ничего нельзя сказать á priori, исходя изъ этой гипотезы, о томъ, какъ повліяетъ давленіе на первую модификацію іодистаго серебра. Термодинамика предсказываетъ, что при достаточномъ давленіи на желтое гексагональное іодистое серебро оно перейдетъ въ красное кубическое безъ всякаго нагрѣванія. Мальяръ и Шателье это и доказали на опытѣ, подвергнувъ желтое іодистое серебро давленію около 3000 атмосферъ.

Приведемъ еще два примѣра изъ другой области. Давно было извѣстно, что нѣкоторые гидро-элементы, давая электрическій токъ, который нагрѣваетъ внѣшнюю цѣпь, или производитъ въ ней какую либо работу, сами во время дѣйствія охлаждаются. Находится ли такое странное свойство этихъ элементовъ въ связи съ какими либо другими физическими данными,—не было извѣстно и объясненій ему ни въ химическихъ, ни въ электрическихъ теоріяхъ не подыскивалось. Приложеніе принциповъ термодинамики къ гальваническимъ элементамъ привело Гельмгольца къ установленію совершенно непредвидѣннаго закона: если электровозбудительная сила элемента возрастаетъ съ повышеніемъ температуры, то элементъ, работая, стремится охладиться; если она возрастаетъ съ пониженіемъ температуры, то элементъ при работѣ нагрѣвается.

Послѣдній примѣръ, о которомъ мы упомянемъ, имѣетъ особый интеерсъ потому, что онъ касается открытія совершенно новаго явленія, относительно котораго можно сказать съ увѣренностью, что оно никогда бы не было обнаружено, если бы его не предсказалъ с. Вильямъ Томсонъ на основаніи термодинамическихъ соображеній. Явленіе Томсона состоитъ въ переносѣ теплоты электрическимъ токомъ вдоль проводника, различныя части котораго находятся при различныхъ температурахъ.

Представленные нами примѣры научнаго предсказанія новыхъ явленій составляютъ лишь ничтожную часть тѣхъ многочисленныхъ цѣнныхъ результатовъ, которые уже доставила термодинамика, наука совершенно новая, едва насчитывающая полустолѣтіе отъ своего зарожденія. Замѣтимъ, однако, что еще за двадцать лѣтъ до появленія ряда работъ, установившихъ начало эквивалентности и сохраненія энергіи, Сади Карно создалъ и довелъ до замѣчательнаго совершенства теорію такъ называемыхъ обращаемыхъ круговыхъ процессовъ,—теорію, перешедшую цѣликомъ, какъ готовый научный вкладъ, въ термодинамику

и приведшую впослѣдствіи Томсона къ формулировкѣ второго основного принципа энергетики.

Вся успѣшность термодинамическаго изслѣдованія тѣхъ или иныхъ физическихъ или химическихъ явленій зависитъ отъ того, можемъ ли мы примѣнительно къ нимъ составить по схемѣ Карно круговой процессъ или не можемъ; понятно, такимъ образомъ, что когда принципъ эквивалентности былъ окончательно установленъ, то развитіе термодинамики пошло быстрыми шагами, встрѣтивъ въ работахъ Сади Карно готовую и чрезвычайно плодородную почву.

Разбирая значеніе термодинамичекихъ принциповъ въ дѣлѣ изученія природы, Пуанкаре*) опредѣляетъ его такъ: „изъ всякаго закона, обнаруженнаго опытомъ, эти принципы позволяютъ вывести другой, такъ сказать обратный. Воздухъ расширяется, когда его нагрѣваютъ, значитъ онъ нагрѣвается когда его сжимаютъ и т. п. Такимъ образомъ термодинамика въ нѣкоторомъ смыслѣ удваиваетъ наши знанія. Это много, но это и все“, замѣчаетъ онъ. Это дѣйствительно много, но это далеко не все. Кромѣ частнаго значенія въ каждомъ частномъ явленіи многіе выводы термодинамики имѣютъ еще и другое, болѣе широкое значеніе. Укажемъ лишь на два результата, представляющіе интересъ, выходящій далеко за предѣлъ узкихъ рамокъ какого либо частнаго вопроса. Такое основное понятіе, какъ понятіе о температурѣ до работъ Сади Карно было совершенно смутно. Отъ выбора термометрическаго тѣла зависѣла и термометрическая скала, которая такимъ образомъ являлась вполнѣ произвольной и случайной. Термодинамика впервые дала возможность построить совершенно правильную скалу температуръ, хотя также произвольную, но уже единственную, строго опредѣленную и *вполнѣ независящую отъ какихъ бы то ни было частныхъ свойствъ физическихъ тѣлъ*, это—*скала абсолютныхъ температуръ*, получившая важное значеніе во многихъ научныхъ вопросахъ. Еще одинъ результатъ изъ другой области. Всякому хорошо извѣстно, что человѣкъ работающій требуетъ усиленнаго питанія сравнительно съ человѣкомъ, ничего не дѣлающимъ, и что во время самой работы дыханіе учащается и дѣятельность сердца повышается. Откуда же берется рабочая сила организма? Этотъ вопросъ могъ быть разрѣшенъ лишь благодаря примѣненію къ живому организму тѣхъ же принциповъ термодинамики, которые управляютъ и работою паровой машины. Опыты показали, что при напряженной работѣ человѣкъ поглощаетъ при процессѣ дыханія кислорода въ пять разъ больше, чѣмъ при покоѣ, между тѣмъ какъ количество теплоты, отдѣляемой его организмомъ, возрастаетъ не въ пять разъ, а лишь въ два, и, слѣдовательно, значительная часть теплоты, получаемой отъ окисленія крови кислородомъ воздуха, превращается въ организмѣ въ механическую работу. Ближайшій разборъ этого вопроса показалъ бы намъ, что животный организмъ представляетъ собою тепловую машину гораздо болѣе совершенную, чѣмъ всѣ машины, созданныя техникою.

Мы ничего не говорили о значеніи термодинамики для техники, представляющей широкое поле для примѣненія термодинамическихъ

*) l. c. p. XVII.

выводовъ. По самой сущности дѣла вопросы техника будутъ чужды нашему курсу и мы ограничимся въ этомъ отношеніи лишь разборомъ одного изъ интереснѣйшихъ соображеній, высказанныхъ с. Вильямомъ Томсономъ,—о выгодѣ отопленія не теплотою, а работою.

Проф. *Н. Пильчиковъ* (Одесса).

О БИНОМѢ НЬЮТОНА.

Общеупотребительный выводъ формулы бинома Ньютона представляется, конечно, однимъ изъ самыхъ естественныхъ, но такъ какъ въ составъ его входитъ теорія соединеній, то весь аппаратъ оказывается если не слишкомъ сложнымъ, то, по крайней мѣрѣ, требующимъ слишкомъ много времени, — больше, чѣмъ могутъ удѣлить ему нѣкоторыя учебныя заведенія. Нельзя, конечно, отрицать высоко образовательнаго значенія теоріи комбинацій: тонкія соображенія этого отдѣла и интересныя, трудныя, требующія напряженнаго вниманія задачи, къ нему относящіяся, могутъ сослужить развитію учениковъ хорошую службу. Но, къ сожалѣнію, эти хорошія качества, за недостаткомъ времени, вовсе не эксплуатируются, и теорія комбинацій является только прихожей къ биному Ньютона, прихожей, которую стараются пройти какъ можно скорѣе. При такихъ условіяхъ, не лучше ли вовсе отказаться отъ этой теоріи и вывести формулу Ньютона безъ ея посредства? Такихъ выводовъ существуетъ нѣсколько, но только одинъ изъ нихъ, основанный на свойствахъ ариѳметическаго треугольника Паскаля, безукоризненъ въ педагогическомъ отношеніи какъ со стороны естественности, такъ и въ отношеніи простоты. Такъ какъ выводъ этотъ довольно „хорошо забытъ“ въ нашей педагогической литературѣ, то изложеніе его можетъ быть и не будетъ безполезно, тѣмъ болѣе, что въ большинствѣ курсовъ онъ представляется въ видѣ, значительно осложненномъ разными побочными теоремами. Въ концѣ замѣтки приводится еще способъ Эйлера, интересный съ чисто математической стороны.

1. Степени 11*).

$$\begin{array}{r} 11 \\ \times\ 11 \\ \hline 121 \end{array}$$

Слѣдовательно:

$$(10+1)^2 = 1.10^2 + 2.10 + 1.$$

$$\begin{array}{r} 121 \\ \times\ 11 \\ \hline 121 \\ 121 \\ \hline 1331 \end{array}$$

*) Я держусь въ началѣ алгебры *Laisant* et *Perrin* (1892 г.).

Слѣдовательно:

$$(10+1)^3 = 1.10^3 + 3.10^2 + 3.10 + 1.$$

$$\begin{array}{r} 1331 \\ \times\, 11 \\ \hline 1331 \\ 1331 \\ \hline 14641 \end{array}$$

Слѣдовательно:

$$(10+1)^4 = 1.10^4 + 4.10^3 + 6.10^2 + 4.10 + 1.$$

2. Степени (x + 1). Если основанiе нумерацiи не 10, а x, то число 11 изобразится черезъ $(x+1)$ и по предыдущему:

$$(x+1)^2 = 1.x^2 + 2.x + 1$$
$$(x+1)^3 = 1.x^3 + 3.x^2 + 3x + 1$$
$$(x+1)^4 = 1.x^4 + 4.x^3 + 6x^2 + 4x + 1.$$

Коэффицiенты при $(x+1)^5$, очевидно, получатся сложенiемъ соотвѣтствующихъ чиселъ двухъ рядовъ:

$$\begin{array}{llllll} & 1, & 4, & 6, & 4, & 1 \\ 1, & 4, & 6, & 4, & 1 & \end{array}$$

и будутъ:

$$1,\ 5,\ 10,\ 10,\ 5,\ 1.$$

Отсюда ясно, что коэффицiенты послѣдовательныхъ степеней $(x+1)$ суть числа слѣдующихъ рядовъ:

$$\begin{array}{llllll} 1, & 1 & & & & \\ 1, & 2, & 1 & & & \\ 1, & 3, & 3, & 1 & & \\ 1, & 4, & 6, & 4, & 1 & \\ 1, & 5, & 10, & 10, & 5, & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots, & \end{array} \qquad (A)$$

гдѣ каждое число равно суммѣ числа, стоящаго надъ нимъ, и числа, написаннаго непосредственно лѣвѣе послѣдняго*).

Если числа n-ой строки, начиная съ 1, обозначимъ символами:

$$C_n^0,\ C_n^1,\ C_n^2,\ \ldots\ldots\ C_n^n,$$

то:

$$(x+1)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} + \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot + C_n^n.$$

*) Любители такъ называемыхъ „общихъ доказательствъ" могутъ формулировать это положенiе на основанiи слѣдующихъ равенствъ:

$$(x+1)^n = x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + A_3 x^{n-3} + \cdots$$

$$(x+1)^{n+1} = x^{n+1} + \begin{array}{l|l|l|l} A_1 & x^n + A_2 & x^{n-1} + A_3 & x^{n-2} + \cdots \\ +1 & + A_1 & \phantom{x^{n-1}} + A_2 & \end{array}$$

Теперь надо найти выраженія для коэффиціентовъ C_n^0, C_n^1, C_n^2, C_n^3 и т. д. Съ этою цѣлью докажемъ слѣдующую теорему.

3. Теорема. *Въ каждой строкѣ* (*таблицы* A) *отношеніе какого нибудь члена къ непосредственно ему предшествующему равно отношенію номеровъ этихъ членовъ, если номеръ послѣдующаго члена считать отъ конца строки, а номеръ предыдущаго отъ начала ея.*

Для первыхъ строкъ теорема оправдывается непосредственною провѣркою. Поэтому, съ цѣлью общаго доказательства ея, допустимъ справедливость теоремы для n-ой строки и докажемъ, что она будетъ имѣть мѣсто и для $(n+1)$-ой строки.

Итакъ, сохраняя вышепринятыя означенія, будемъ искать отношеніе:

$$\frac{C_{n+1}^{k+1}}{C_{n+1}^{k}}.$$

По предыдущему:

$$\frac{C_{n+1}^{k+1}}{C_{n+1}^{k}}=\frac{C_n^{k+1}+C_n^k}{C_n^k+C_n^{k-1}}=\frac{\frac{C_n^{k+1}}{C_n^k}+1}{1+\frac{C_n^{k-1}}{C_n^k}}=\frac{\frac{n-k}{k+1}+1}{1+\frac{k}{n+1-k}}=\frac{n-k+1}{k+1},$$

а такъ какъ $(n-k+1)$ и $(k+1)$ выражаютъ номера членовъ C_{n+1}^{k+1} и C_{n+1}^{k} (при принятыхъ условіяхъ), то теорема доказана.

4. Выраженія для коэффиціентовъ бинома. Теперь уже не трудно найти выраженія коэффиціентовъ C_n^0, C_n^1, C_n^2, ... C_n^{k+1}, причемъ относительно перваго очевидно, что онъ раненъ 1.

По доказанной теоремѣ:

$$C_n^1=n,$$

$$\frac{C_n^2}{C_n^1}=\frac{n-1}{2},$$

$$\frac{C_n^3}{C_n^2}=\frac{n-2}{3},$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$\frac{C_n^{k+1}}{C_n^k}=\frac{n-k}{k+1}.$$

Отсюда:

$$C_n^{k+1}=\frac{n(n-1)\ldots.(n-k)}{1.2\ldots\ldots(k+1)}.$$

И потому:

$$(x+1)^n=x^n+nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}+\cdots\cdot+$$

$$+\frac{n(n-1)\ldots.(n-k)}{1.2\ldots\ldots(k+1)}x^{n-k+1}+\cdots\cdot+1.$$

5. Степень бинома $(x+a)$.

$$(x+a)^n = a^n\left(\frac{x}{a}+1\right)^n.$$

Слѣдовательно и пр.

6. Свойство коэффиціентовъ бинома. Теорема. *Въ таблицѣ* А *члены какой угодно строки, равноудаленные отъ крайнихъ, равны между собою.*

Для первыхъ строкъ теорема оправдывается изъ непосредственнаго обзора таблицы. Съ цѣлью общаго доказательства допустимъ, что она имѣетъ мѣсто для n-ой строки и докажемъ справедливость ея для $(n+1)$-ой строки т. е. докажемъ, что:

$$C_{n+1}^k = C_{n+1}^{\prime k},$$

гдѣ первый символъ означаетъ k-ый членъ отъ начала, а второй—k-ый членъ *отъ конца*. При этихъ обозначеніяхъ часть таблицы А представится такъ:

$$\begin{array}{c} \ldots C_n^{k-1},\ C_n^k \ldots\ldots\ldots C_n^{\prime k},\ C_n^{\prime k-1} \\ C_{n+1}^k \ldots\ldots \quad C_{n+1}^{\prime k}, \end{array}$$

и слѣдовательно:

$$C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1},$$

$$C_{n+1}^{\prime k} = C_n^{\prime k} + C_n^{\prime k-1},$$

но по условію:

$$C_n^k = C_n^{\prime k},$$

$$C_n^{k-1} = C_n^{\prime k-1}.$$

Слѣдовательно, теорема доказана. Разумѣется, не будетъ никакой пестроты, если ввести и обычное доказательство равенства символовъ C_n^k и $C_n^{\prime k}$.

---

7. Способъ Эйлера*). Пусть:

$$f(x) = (1+ax)(1+a^2x)\ \ldots\ (1+a^nx).$$

Полагаемъ:

$$f(x) = 1 + A_1x + A_2x^2 + \cdots + A_nx^n.$$

Въ тождествѣ:

$$(1+ax)f(ax) = (1+a^{n+1}x)f(x)$$

замѣнимъ $f(x)$ и $f(ax)$ ихъ разложеніями и сравнимъ коэффиціенты при x^p въ обѣихъ частяхъ равенства.

---

*) *E. Lucas.* Théorie des nombres. 1891 г. стр. 183.
Laisant et *Perrin.* Premiers principes d'algèbre, стр. 302.

Найдемъ:

$$a^p A_{p-1} + a^p A_p = a^{n+1} A_{p-1} + A_p.$$

Отсюда:

$$A_p = A_{p-1} \cdot \frac{a^{n+1} - a^p}{a^p - 1}.$$

Поэтому:

$$A_{p-1} = A_{p-2} \cdot \frac{a^{n+1} - a^{p-1}}{a^{p-1} - 1},$$

. . . .

$$A_2 = A_1 \cdot \frac{a^{n+1} - a^2}{a^2 - 1},$$

$$A_1 = \frac{a^{n+1} - a}{a - 1}.$$

Перемножая эти равенства, найдемъ:

$$A_p = \frac{(a^n - 1)(a^{n-1} - 1) \ldots (a^{n-p+1} - 1)}{(a - 1)(a^2 - 1) \ldots (a^p - 1)} a^{\frac{p(p+1)}{2}}$$

При $a = 1$, $f(x)$ обращается въ

$$(1 + x)^n,$$

а A_p, которое можетъ быть представлено такъ:

$$A_p = \frac{a^n - 1}{a - 1} \cdot \frac{a^{n-1} - 1}{a^2 - 1} \cdots \frac{a^{n-p+1} - 1}{a^p - 1} a^{\frac{p(p+1)}{2}},$$

послѣ сокращенiй, опредѣлится по формулѣ:

$$A_p = \frac{n(n-1) \ldots (n-p+1)}{1.2.3 \ldots p}.$$

---

8. Литературныя справки. Кромѣ изложенныхъ способовъ вывода формулы бинома, мнѣ извѣстны еще два: одинъ, приведенный между прочимъ въ алгебрѣ Тотгентера*), предполагаетъ справедливость формулы для показателя n и доказываетъ ее для показателя $(n + 1)$; другой проведенъ въ курсѣ de Longchamps**) и исходитъ изъ довольно сложнаго тождества.

Не заслуживаютъ, кажется, особаго упоминанiя разные другiе варiанты способа неопредѣленныхъ коэффицiентовъ. Всѣ эти методы съ педагогической точки зрѣнiя не выдерживаютъ никакой критики.

М. Попруженко (Оренбургъ).

---

*) *Тотгентеръ.* Алгебра. 1891, стр. 256.

**) *De Longchamps.* Algèbre, стр. 6.

ОБЪ УЧЕБНИКАХЪ АЛГЕБРЫ

и

НѢКОТОРЫХЪ НОВОВВЕДЕНІЯХЪ ВЪ НИХЪ.

Киселевъ. Элементарная Алгебра. 3-е изд. 1893 г.
Никульцевъ. Алгебра и собраніе алгебраическихъ задачъ. 3-е изд. 1894 г.

I.

Учебники алгебры, подобно всѣмъ другимъ учебникамъ, которые пишутся для средней школы, преслѣдуютъ заразъ нѣсколько цѣлей: они должны служить и учебниками при классномъ преподаваніи, и руководствами при самообученіи, и методическими руководствами для преподавателей. Если составитель учебника, обыкновенно самъ преподаватель, выработалъ какіе нибудь удачные пріемы при прохожденіи того или другого отдѣла, онъ не видитъ иного средства подѣлиться своимъ изобрѣтеніемъ съ другими, какъ помѣстить его въ своемъ учебникѣ. Намъ кажется, что пока эти различныя цѣли не будутъ отдѣлены, пока не будетъ особыхъ методическихъ руководствъ для учителей и особыхъ учебниковъ для учениковъ, ни одна изъ цѣлей не будетъ достигаться удовлетворительно.

Преподаваніе алгебры, какъ и другихъ предметовъ, можетъ быть болѣе живымъ, или болѣе сухимъ. Это зависитъ отъ того, ограничивается-ли преподаватель при сообщеніи извѣстнаго понятія однимъ голымъ опредѣленіемъ, или подставляетъ подъ него достаточное количество болѣе конкретныхъ понятій и представленій, гдѣ можно, такихъ, которыя связаны съ тѣми или другими интересами. Усвоеніе и запоминаніе курса алгебры значительно облегчается, если при доказательствѣ какой либо новой теоремы напомнить и сравнить аналогичныя доказательства, встрѣчавшіяся раньше въ томъ же курсѣ алгебры, или въ другихъ наукахъ: геометріи, физикѣ. Усвоеніе общаго доказательства теоремы часто облегчается предварительнымъ доказательствомъ ея для простого частнаго случая. Всѣ эти пріемы должны имѣть мѣсто въ преподаваніи алгебры, и чѣмъ больше ихъ указано въ методическомъ руководствѣ для преподавателя, тѣмъ лучше; но имъ не мѣсто въ учебникѣ. Учебникъ долженъ содержать сжатое и точное изложеніе самаго существеннаго, что должно быть усвоено и безъ чего знаніе курса не было бы систематично. Подробности, интересныя приложенія должны быть усвоены со словъ преподавателя, съ доски. При такомъ порядкѣ большинство учащихся, за исключеніемъ, быть можетъ, двухъ трехъ зѣвакъ, которые все равно ничего толкомъ не усвоятъ, лучше будетъ помнить и эти подробности, чѣмъ теперь, когда они тратятъ много времени, разучивая и повторяя ихъ по учебнику: а насколько выиграетъ знаніе основной части курса, объ этомъ трудно составить теперь понятіе. Заучиваніе по учебнику и главныхъ правилъ и второстепенныхъ ведетъ къ тому, что все одинаково помнится и одинаково забывается. А помнить всего невозможно. И такъ мы настаиваемъ на томъ, что учебникъ долженъ содержать только самое существенное въ сжатомъ, систематическомъ изложеніи. Исключеніе мы допускаемъ только для

статей, которыя не подлежатъ прохожденію въ классѣ, а предназначаются авторами для удовлетворенія собственной любознательности учащихся. Эти статьи могутъ быть помѣщены особо, въ приложеніи, и такъ какъ онѣ предназначаются для самостоятельнаго изученія, изложеніе ихъ можетъ быть болѣе подробнымъ.

Безполезно было бы теперь указывать всѣ мѣста, которыя могли бы быть выпущены, или сокращены въ разсматриваемыхъ учебникахъ. Нужно прежде, чтобы авторы усвоили нашу точку зрѣнія и сами сдѣлали это.

На обоихъ разсматриваемыхъ учебникахъ отразились новыя теченія въ литературѣ алгебры. Наиболѣе полное выраженіе новыхъ идей въ нашей алгебраической литературѣ представляетъ алгебра Бертрана въ переводѣ Билибина; но намъ кажется, что о пользованіи этой книгой, какъ учебникомъ при преподаваніи алгебры въ гимназіяхъ, не можетъ быть и рѣчи. Въ учебникѣ г. Киселева новыя теоріи проведены довольно послѣдовательно, лишь съ небольшими упрощеніями; въ учебникѣ г. Никульцева съ бо̀льшей осторожностью, съ бо̀льшими упрощеніями и потому, быть можетъ, съ меньшей послѣдовательностью. Наиболѣе существенной переработкѣ подверглись за послѣднее время статьи объ отрицательныхъ числахъ, о рѣшеніи уравненій и неравенствъ и о несоизмѣримыхъ числахъ. На этихъ статьяхъ мы и остановимся. Какъ представителя стараго способа изложенія выберемъ для сравненія всѣмъ извѣстный учебникъ Давидова.

II. Отрицательныя числа.

Старая теорія отрицательныхъ чиселъ исходила изъ понятія о противоположныхъ величинахъ, какъ различныхъ направленіяхъ одной и той-же относительной величины. Относительными называются величины, которыя имѣютъ произвольный нуль, отъ котораго онѣ могутъ считаться въ ту и другую сторону. За единицу мѣры принимается какой либо размѣръ одного изъ направленій относительной величины. Это направленіе называется положительной величиной и размѣры его выражаются положительными числами; противоположное направленіе называется отрицательной величиной и размѣры его выражаются отрицательными числами. Изъ свойствъ противоположныхъ величинъ вытекаетъ основное свойство отрицательныхъ чиселъ, что каждая отрицательная единица уничтожаетъ при прибавленіи одну положительную единицу и, слѣдовательно, a отрицательныхъ единицъ и a положительныхъ единицъ даютъ въ суммѣ нуль:

$$a + (-a) = 0.$$

Это равенство заключаетъ въ себѣ всю теорію отрицательныхъ чиселъ. Эта теорія имѣетъ такимъ образомъ совершенно реальное основаніе, представляющее прямое продолженіе того обобщенія понятія о числѣ, которое сдѣлано введеніемъ дробныхъ чиселъ. Величины прерывныя и абсолютныя, имѣющія абсолютную единицу и абсолютный нуль, даютъ начало цѣлымъ положительнымъ числамъ; величины непрерывныя и абсолютныя, имѣющія произвольную единицу и абсолютный нуль, даютъ начало дробнымъ положительнымъ числамъ; величины прерывныя или

непрерывныя относительныя даютъ начало отрицательнымъ числамъ. И вызывается это послѣднее обобщеніе той же потребностью, какъ и первое: для того, чтобы математика съ наибольшимъ успѣхомъ могла быть примѣнена къ изслѣдованію природы, нужно, чтобы одинаковымъ отношеніямъ между величинами, одинаковой природѣ вопросовъ соотвѣтствовали одинаковыя формулы. Для того, чтобы стоимость нѣкотораго количества a какого либо товара, котораго 1 единица стоитъ b рубл., выражалась формулой ab, каково бы ни было это количество и какова бы ни была единица мѣры его, нужно ввести дробныя числа; для того, чтобы разстояніе отъ точки A до точки B выражалось формулой $b—a$, разностью координатъ конечной и начальной точекъ, гдѣ бы онѣ ни лежали и какая бы точка линіи AB ни была принята за начало разстояній, нужно ввести отрицательныя числа. Здѣсь каждому опредѣленію, каждому общему понятію соотвѣтствуетъ значительная группа болѣе конкретныхъ понятій и представленій, которыя ихъ оживляютъ и сообщаютъ реальный характеръ всѣмъ дѣлаемымъ изъ нихъ дедукціямъ. Совсѣмъ иной, чисто формальный характеръ носитъ новая теорія.

Новая теорія отрицательныхъ чиселъ исходитъ изъ слѣдующихъ соображеній: свойства прямыхъ линій, угловъ, количествъ тепла, работъ, вообще всякихъ величинъ выводятся изъ точнаго опредѣленія ихъ равенства и суммы. Не смотря на разногласія и спутанность въ опредѣленіяхъ прямой линіи и угла, теорія этихъ величинъ нисколько отъ этого не страдаетъ, потому что мы имѣемъ точныя опредѣленія ихъ равенства и суммы. Такимъ же образомъ точная теорія чиселъ основывается не на опредѣленіи того, что такое число, а на присущемъ каждому, если и не всегда явно выражаемомъ, точномъ понятіи о равенствѣ и суммѣ двухъ чиселъ. Отсюда слѣдуетъ, что можно построить точную теорію какихъ либо величинъ, если опредѣлить ихъ равенство и сумму, хотя бы мы и не умѣли опредѣлить и не понимали ихъ сущности; и далѣе, что можно было бы построить точную теорію какихъ либо символовъ, если бы мы опредѣлили ихъ равенство и сумму, хотя бы ничто въ дѣйствительности имъ не соотвѣтствовало. Отрицательныя числа и вводятся, какъ такого рода символы, которыхъ сущность вовсе не опредѣляется, а дается только точное опредѣленіе ихъ равенства и суммы, prima facie совершенно произвольное; изъ этого опредѣленія дѣлаются дедукціи и только результатамъ, какъ бы случайно, даются реальныя истолкованія. Такова сущность новой теоріи. Если и признать доказаннымъ преимущество ея передъ старой съ точки зрѣнія чистой науки, мы не колеблясь утверждаемъ, что изложеніе ея въ средней школѣ невозможно. Можно, пожалуй, спорить о томъ, доступна она, или не доступна для учениковъ VIII класса гимназій, или VII класса реальныхъ училищъ, но ожидать, что ее пойметъ хотя одинъ ученикъ III класса было бы совершенно нелѣпо. Въ самомъ дѣлѣ, невозможно сколько нибудь сознательно принять эту теорію, не понявъ въ той или иной формѣ ея основанія, выраженнаго въ приведенныхъ выше соображеніяхъ, а для этого нужно раньше уяснить себѣ логическую систему дедуктивной науки. Разумѣется, можно заставить выучить все, что угодно, и бываютъ ученики съ такимъ подвижнымъ и пластичнымъ умомъ, что легко схватываютъ нѣкоторые чисто внѣшніе признаки но-

выхъ понятій, которые помогаютъ имъ избѣгать слишкомъ нелѣпыхъ выраженій о томъ, чего они въ сущности не понимаютъ; но что можетъ понять ученикъ III класса въ этихъ: „допустимъ, что отрицательныя числа существуютъ", „допустимъ, что всѣ правила объ измѣненіи суммы, разности и т. д., выведенныя въ ариѳметикѣ для положительныхъ чиселъ, справедливы и для отрицательныхъ чиселъ"? Какъ пойметъ онъ эти: „допустимъ"? и заставлять его выучивать и повторять намъ эти фразы—не значитъ-ли это въ погонѣ за самой научной наукой уничтожать въ немъ всѣ сѣмена истинно научнаго мышленія, заложенныя предшествующимъ курсомъ математики, и не только уничтожать то, что заложено раньше, но и на долгое время впередъ лишать способности воспринимать что-либо разумно?

Но, быть можетъ, скажутъ, что и старая теорія мало доступна для учениковъ III класса? Мы не станемъ этого оспаривать. Она также мало доступна для третьеклассниковъ, какъ нѣкоторые другіе отдѣлы математики для тѣхъ классовъ, въ которыхъ ихъ теперь приходится проходить, напр. умноженіе и дѣленіе на дробь для II класса, несоизмѣримыя числа для V. Но разница между обѣими теоріями въ этомъ отношеніи громадная. Въ новой теоріи, представляющей чисто формальное построеніе, кто не пойметъ всего, тотъ не пойметъ ничего. Въ старой же теоріи, если общія опредѣленія и не будутъ сразу различены, все же тѣ живыя представленія, которыя ими обнимаются и которыя должны быть сообщены въ достаточномъ количествѣ, будутъ усвоены, если не всѣ, то нѣкоторыя, и эти послѣднія могутъ служить, если не такимъ же общимъ, то не менѣе дѣйствительнымъ основаніемъ для заключеній. И вѣдь, въ сущности, этотъ способъ заключенія отъ частнаго прямо къ частному наиболѣе привыченъ людямъ вообще, а чѣмъ ближе къ дѣтскому возрасту, тѣмъ больше. Мы думаемъ, что всякій, кто заставлялъ учениковъ дѣлать самостоятельныя заключенія, согласится, что какъ только они оставляютъ книжку и начинаютъ разсуждать самостоятельно, то сейчасъ же переходятъ къ этому способу заключеній отъ частнаго прямо къ частному. Исключеніе составляютъ немногіе, какъ бы отъ природы логическіе умы. Итакъ, если старая теорія и не будетъ понята въ своей общей логической системѣ, все же всѣ выводы ея будутъ приняты сознательно, хотя и поняты, быть можетъ, каждымъ по своему.

Авторы разсматриваемыхъ учебниковъ, принявъ новую теорію, старались упростить ея изложеніе и сдѣлать ее доступною для учащихся. Но если, какъ объяснено выше, недоступность свойственна этой теоріи по существу, то понятно, что всѣ частныя передѣлки сдѣлали ее развѣ болѣе легкой для заучиванія, но никакъ не для пониманія. Къ тому же онѣ исказили систему и сдѣлали ее логически неправильной.

У г. Никульцева въ § 11 смѣшиваются понятія съ ихъ обозначеніями: „Условимся считать—1,—2,—3,... числами, которыя меньше 0 на 1, 2, 3..." Не ясно, относительно чего здѣсь дѣлается условіе: относительно ли того, какъ обозначать числа, меньшія нуля, или относительно самаго существованія такихъ чиселъ. По смыслу надо предположить послѣднее, потому что можно условливаться относительно обозначенія только того, что уже принято, какъ существующее, или возможное, или

мыслимое, а этого не было. Итакъ это есть 1-е условіе относительно отрицательныхъ чиселъ. Далѣе въ § 12: „Замѣчанія, выведенныя въ ариѳметикѣ относительно измѣненія суммы и разности, условились считать вѣрными и въ томъслучаѣ, когда между данными для сложенія или вычитанія числами встрѣчаются отрицательныя". Мы получаемъ такимъ образомъ цѣлый рядъ условій, зависимыхъ между собой и однако принятыхъ произвольно. Это логически неправильно, потому что при построеніи всякой дедуктивной логической системы можно произвольно принять только независимыя между собой условія; если же принимаемъ условія зависимыя, то надо доказать, что между ними нѣтъ противорѣчія. Этого доказательства тоже не приведено.

Чтобы сдѣлать свое изложеніе какъ можно научнѣе, г. Киселевъ вводитъ такія опредѣленія (§ 27): „1) Разность между одинаковыми числами принимается равной нулю... 3) придать къ числу 0 значитъ оставить это число безъ измѣненія". Но это не избавило его изложеніе отъ такой же ошибки, какъ и у г. Никульцева. Такъ, уже въ § 27 встрѣчаемъ два опредѣленія, зависимыя между собой и однако принятыя безъ доказательства: „2) Разность между меньшимъ числомъ и большимъ принимается равной избытку большаго числа надъ меньшимъ, взятому со знакомъ —. Число съ предшествующимъ знакомъ — называется отрицательнымъ" и „4) придать отрицательное число значитъ вычесть его абсолютную величину".

Далѣе въ § 37 новое произвольное условіе (собственно три новыхъ условія): „перемножить два какія угодно числа значитъ перемножить ихъ абсолютныя величины и произведеніе взять со знакомъ + и т. д.". Это послѣднее условіе было бы независимо отъ первыхъ, если бы не было общаго опредѣленія умноженія въ § 5. Тогда можно было бы его разсматривать, какъ опредѣленіе умноженія. Такъ это и сдѣлано въ алгебрѣ Бертрана (пер. Билибина). Но если бы и принять изложеніе г. Киселева въ такомъ смыслѣ, т. е. забыть о § 5, то ему нельзя было бы не сдѣлать упрека въ другомъ отношеніи. Составитель чисто научнаго курса можетъ не заботиться о примѣненіи излагаемыхъ имъ ученій и придавать своему изложенію такую степень общности, чтобы получить наиболѣе стройную и замкнутую въ себѣ систему. Но составитель учебника для средней школы не можетъ не думать о примѣненіи курса алгебры къ рѣшенію задачъ и другихъ вопросовъ, встрѣчающихся въ геометріи и физикѣ. Съ этой точки зрѣнія не безразлично, какое опредѣленіе дать дѣйствію: чѣмъ болѣе оно формально и условно, тѣмъ больше трудностей представляетъ сознательное примѣненіе дѣйствія. Вѣдь сознательное примѣненіе дѣйствія представляетъ также дедуктивное доказательство, котораго 1-ой посылкой служитъ опредѣленіе дѣйствія, а послѣдней—данная конкретная зависимость величинъ. Нельзя же, принявъ приведенное выше условіе за опредѣленіе умноженія, примѣненіе этого дѣйствія основывать на ариѳметическомъ опредѣленіи умноженія, для цѣлыхъ чиселъ, напр. сказать: тѣло въ 1 сек. проходитъ v метровъ, а въ t сек. (напр. въ—$2^3/_4$ сек.) въ t разъ больше.

Недостаточно обосновано примѣненіе отрицательныхъ чиселъ къ измѣренію противоположныхъ величинъ и у г. Никульцева. Слѣдовало доказать, что противоположныя величины отвѣчаютъ *всѣмъ* условіямъ, по-

ставленнымъ для отрицательныхъ чиселъ. Вообще, если бы составители учебниковъ по алгебрѣ и ариѳметикѣ обратили должное вниманіе на примѣненіе теоріи, они были бы менѣе падки на излишнее обобщеніе опредѣленій и условій, какъ ни заманчивымъ это кажется съ точки зрѣнія стройности теоріи.

III. Уравненія и неравенства.

Рѣшеніе уравненій и неравенствъ разсматривается какъ рядъ преобразованій ихъ, тождественныхъ вполнѣ, или съ извѣстными ограниченіями. Оно основывается на теоремахъ о тождественности уравненій и неравенствъ, а эти, въ свою очередь, вытекаютъ изъ основныхъ свойствъ равенствъ. Въ разсматриваемыхъ учебникахъ, какъ и у Давидова, основныя свойства равенствъ не только не доказываются, но даже не высказываются явно. Этого не дѣлаетъ даже г. Киселевъ, который прилагаетъ вообще большое стараніе къ тому, чтобы ни одно изъ основаній науки не осталось не высказаннымъ до того, что привелъ даже отмѣченныя выше опредѣленія нуля. Это совсѣмъ не послѣдовательно, и намъ кажется даже неправильнымъ не только отсутствіе упоминанія объ основныхъ свойствахъ равенствъ, но и отсутствіе доказательства ихъ. Въ самомъ дѣлѣ, вѣдь это послѣднее представляетъ въ сущности доказательство однозначности алгебраическихъ функцій. Если же признать очевидной однозначность суммы, разности, произведенія, частнаго, степени, то почему не признать очевидной однозначность корня?

Равенствами мы пользуемся не только для рѣшенія задачъ, но и для доказательствъ. Поэтому изложеніе общихъ свойствъ равенствъ должно предшествовать статьѣ о дробяхъ, въ которой обыкновенно впервые прибѣгаютъ къ доказательствамъ посредствомъ равенствъ. Странную непослѣдовательность представляетъ также начинать рѣчь о равенствахъ послѣ статьи о пропорціяхъ.

Вопросъ о рѣшеніи уравненій и неравенствъ изложенъ съ большею послѣдовательностью у г. Киселева. Не разсмотрѣны только съ общей точки зрѣнія логариѳмированіе уравненій и возстановленіе логариѳмическаго уравненія. По всему изложенію можно думать, что эти преобразованія разсматриваются, какъ вполнѣ тождественныя. Между тѣмъ, такъ какъ въ статьѣ о логариѳмахъ принимается, что отрицательныя числа не имѣютъ логариѳмовъ, то въ логариѳмическомъ уравненіи тѣ выраженія, которыя стоятъ подъ знакомъ *lg*, должны быть положительными. Поэтому логариѳмированіе уравненія вводитъ новое условіе и, слѣд., вообще говоря, уничтожаетъ нѣкоторые корни: возстановленіе логариѳмическаго уравненія вообще вводитъ лишніе корни.

У г. Никульцева кромѣ того не разсмотрѣны съ общей точки зрѣнія рѣшенія неравенствъ и системъ уравненій.

Въ обоихъ учебникахъ устранено ошибочное замѣчаніе Давидова (§ 120), что „...умноженіе обѣихъ частей уравненія на множитель, содержащій неизвѣстныя, приводитъ къ уравненію, тождественному съ первымъ..., когда количество, на которое множимъ, есть наименьшее кратное всѣхъ знаменателей“. Въ доказательствѣ этого положенія у Давидова встрѣчается ошибочное заключеніе, что такъ какъ A_1, B_1 и m не

имѣютъ общаго множителя, то и $A_1 - B_1$ не имѣетъ общаго множителя съ *m*. У г. Никульцева приведенъ примѣръ, когда при этихъ условіяхъ получается уравненіе, не тождественное съ даннымъ (§ 72 замѣчаніе 2, прим. 1).

Намъ остается теперь по этому вопросу высказать только пожеланіе, чтобы составители задачниковъ слѣдовали за теоріей и не продолжали подбирать только такіе примѣры, когда всякія преобразованія приводятъ къ уравненіямъ тождественнымъ, потому что теперь у учениковъ можетъ явиться представленіе, что всѣ разсужденія о нетождественности нѣкоторыхъ преобразованій въ сущности одно празднословіе и приводимые учителемъ примѣры только исключительныя хитрыя выдумки.

IV. Несоизмѣримыя числа.

Съ несоизмѣримыми числами мы встрѣчаемся въ алгебрѣ въ ученіи объ извлеченіи корней, о дѣйствіяхъ надъ радикалами, о логариѳмахъ, о безконечныхъ непрерывныхъ дробяхъ. Прежній способъ изложенія этихъ статей состоялъ въ томъ, что на несоизмѣримыя числа распространялись свойства и правила дѣйствій, выведенныя для чиселъ соизмѣримыхъ, не заботясь о томъ, что эти свойства и правила выведены на основаніи опредѣленій, совсѣмъ непримѣнимыхъ къ несоизмѣримымъ числамъ. Это былъ, впрочемъ, общій пріемъ, какимъ вводились всѣ обобщенія въ алгебру. Затѣмъ въ алгебраической литературѣ возникло стремленіе устранить эти логическіе пробѣлы и преобразовать алгебру въ строгую логическую систему на подобіе геометріи. Съ этой цѣлью введены точныя опредѣленія несоизмѣримыхъ чиселъ и дѣйствій надъ ними, и при помощи этихъ опредѣленій правила дѣйствій распространены на несоизмѣримыя числа. Эти послѣднія опредѣляются, какъ предѣлы рядовъ соизмѣримыхъ чиселъ. Поэтому теорія дѣйствій надъ ними основывается на теоріи предѣловъ. Однако слѣдуетъ замѣтить, что до сихъ поръ изложеніе этой теоріи не доведено до такой простоты, чтобы можно было излагать ее въ тѣхъ классахъ, гдѣ впервые встрѣчаемся съ несоизмѣримыми числами.

Ученіе о предѣлахъ излагается въ обоихъ разсматриваемыхъ учебникахъ. Въ учебникѣ г. Киселева оно изложено съ достаточной полнотой, но вмѣстѣ съ тѣмъ слишкомъ сложно даже для самыхъ старшихъ классовъ гимназій и реальныхъ училищъ. Однако мы думаемъ, что это изложеніе могло бы быть упрощено безъ ущерба для логической правильности. Во 1-хъ теоремамъ о предѣлахъ слѣдуетъ придать такую степень общности, чтобы онѣ обнимали всѣ встрѣчающіеся случаи, но не болѣе. Всѣ ряды чиселъ, которые приходится разсматривать, представляютъ или ряды постоянно возрастающіе, или постоянно убывающіе; мы не встрѣчаемъ рядовъ колеблющихся, или легко можемъ ихъ устранить. Такъ, ирраціональный корень представляетъ общій предѣлъ двухъ рядовъ, изъ которыхъ одинъ все возрастаетъ, а другой все убываетъ; подходящія непрерывной дроби легко распадаются на два ряда: одинъ все возрастающій, другой все убывающій. Поэтому и въ теоріи предѣловъ мы можемъ имѣть въ виду предѣлы только такихъ рядовъ. Отъ этого изложеніе значительно выигрываетъ въ удобопонятности и простотѣ. Напр. тогда не будетъ надобности въ теоремахъ 5-й и 6-й, по-

тому что положеніе, названное аксіомой, даетъ достаточное основаніе для заключенія о существованіи предѣла во всѣхъ могущихъ представиться случаяхъ. Во 2-хъ намъ кажется излишнимъ отдѣленіе теоремъ о предѣлахъ величинъ отъ теоремъ о предѣлахъ рядовъ чиселъ. Это удлиняетъ изложеніе, не дѣлая его болѣе яснымъ. Мы думаемъ, что при этихъ упрощеніяхъ теорія предѣловъ сведется къ 14—15 положеніямъ, заключающимся въ слѣдующихъ §§ алгебры Бертрана въ переводѣ Билибина (изд. 1885 г.), съ соотвѣтствующими упрощеніями въ изложеніи нѣкоторыхъ изъ нихъ: §§ 161, 163—166, 168, 175—179, 183, 184. Но и за всѣмъ тѣмъ прохожденіе этой теоріи было бы возможно развѣ въ 8-мъ классѣ гимназій и 7-мъ — реальныхъ училищъ. Поэтому нельзя не одобрить рѣшенія обоихъ авторовъ помѣстить ее въ добавленіяхъ, а въ самомъ курсѣ сохранить пока старую систему изложенія.

Въ учебникѣ г. Никульцева теорія предѣловъ значительно упрощена, но такъ, что стала непримѣнимой въ курсѣ алгебры. Въ самомъ дѣлѣ, на стр. 167 дано опредѣленіе дѣйствій надъ несоизмѣримыми числами, изъ котораго слѣдуетъ, что сумма, разность, произведеніе и т. д. несоизмѣримыхъ чиселъ понимаются, какъ предѣлы суммъ, разностей и т. д. рядовъ соизмѣримыхъ чиселъ, которыхъ предѣлами служатъ несоизмѣримыя числа. Что же доказывается въ § 203, въ статьѣ о предѣлахъ? Если подъ A, B, C разумѣть несоизмѣримыя числа и сумму, разность, произведеніе и т. д. ихъ понимать, какъ опредѣлено выше, то всѣ эти теоремы представляютъ тавтологію. Напр. теорема 7: „предѣлъ суммы конечнаго числа перемѣнныхъ величинъ равенъ суммѣ предѣловъ слагаемыхъ". Но если эти предѣлы слагаемыхъ несоизмѣримыя числа, то вѣдь сумма ихъ ничего другого и не означаетъ, какъ предѣлъ суммы перемѣнныхъ величинъ. Доказывается, такимъ образомъ, что предѣлъ суммы есть предѣлъ суммы. Вмѣсто этихъ теоремъ слѣдовало доказать, что сумма, разность, произведеніе и т. д. перемѣнныхъ величинъ, имѣющихъ предѣлъ, также стремятся къ предѣламъ. Это послужило бы основаніемъ для опредѣленія дѣйствій надъ несоизмѣримыми числами (стр. 167), которое теперь совершенно произвольно, потому что можно сказать: суммой двухъ несоизмѣримыхъ чиселъ называется предѣлъ, къ которому стремится сумма ихъ соизмѣримыхъ значеній, если доказано, что эта послѣдняя имѣетъ предѣлъ. Но такъ какъ этого не было, то самое опредѣленіе лишено смысла.

V. Опредѣленія дѣйствій.

Алгебраическія дѣйствія принято разсматривать, какъ тождественныя преобразованія формулъ. Такъ смотрятъ на нихъ гг. Киселевъ и Никульцевъ. Но тогда отдѣльныя дѣйствія должны представлять различные виды тождественныхъ преобразованій и имѣть соотвѣтствующія опредѣленія. Между тѣмъ опредѣленія дѣйствій даются чисто ариѳметическія; когда же заходитъ рѣчь объ обозначеніи, добавляется, что дѣйствія имѣютъ не тотъ смыслъ въ алгебрѣ, какъ въ ариѳметикѣ. Какъ же опредѣленія тѣ-же, если смыслъ не тотъ?

VI. Нѣкоторые методическіе пріемы.

1. Оба автора даютъ указанія, какъ подготовить понятіе о буквенномъ обозначеніи чиселъ и объ алгебраическихъ формулахъ; оба реко-

мендуютъ обобщенiе рѣшенiя однородныхъ задачъ. Мы совершенно согласны съ этимъ взглядомъ и находимъ, что эта подготовка явится совершенно естественно, если курсъ алгебры начать послѣ того, какъ пройдены нѣсколько родовъ типичныхъ ариѳметическихъ задачъ. Рѣшивъ, напр., нѣсколько задачъ на тройное правило или на правило процентовъ, можно обобщить рѣшенiе и затѣмъ примѣнить его къ рѣшенiю нѣсколькихъ новыхъ задачъ. Г. Киселевъ приводитъ обобщенiе одной задачи, какъ бы въ напоминанiе о томъ, что должно было быть сдѣлано въ классѣ. Г. Никульцевъ останавливается на этомъ болѣе подробно. Онъ подвергаетъ болѣе глубокому анализу—слишкомъ глубокому для учениковъ 3-го класса—самый процессъ обобщенiя, чтобы сразу ввести въ самую сущность алгебраическаго обозначенiя. Это намъ кажется увлеченiемъ, такъ какъ не соотвѣтствуетъ умственному развитiю третьеклассниковъ. Имъ надо показать, какъ обобщаются однородныя задачи и какъ потомъ примѣняются общiя формулы, а не философствовать объ этомъ: всякое объясненiе, болѣе глубокое и сложное, чѣмъ то, которое ученики въ состоянiи понять и охватить, для нихъ не объясняетъ, а затемняетъ дѣло.

2. Въ статьѣ о логариѳмахъ г. Киселевъ объясняетъ понятiе о логариѳмѣ на табличкѣ, содержащей положительные, отрицательные и дробные логариѳмы различныхъ чиселъ при основанiи 4. Г. Никульцевъ идетъ далѣе и предпосылаетъ общему изложенiю логариѳмовъ таблицу степеней 2-хъ и примѣры дѣйствiй надъ степенями 2-хъ при помощи таблицы. Это сразу даетъ живой смыслъ всѣмъ слѣдующимъ опредѣленiямъ и теоремамъ о свойствахъ логариѳмовъ. Вообще, мы находимъ очень желательной подобную методическую разработку различныхъ отдѣловъ гимназическаго курса не только алгебры, но и другихъ предметовъ, но опять повторяемъ, не въ учебникахъ, а въ особыхъ методическихъ руководствахъ, или статьяхъ.

Намъ пришлось въ этихъ замѣткахъ больше высказываться о пробѣлахъ, чѣмъ о достоинствахъ разсматриваемыхъ учебниковъ. Но мы не желали бы, чтобы это было принято, какъ неодобрительный отзывъ объ нихъ. Въ настоящее время учебниковъ алгебры расплодилось столько, что мы знакомы, вѣроятно, только съ небольшой частью ихъ. Поэтому мы не рѣшаемся утверждать, что разсматриваемые учебники лучше всѣхъ другихъ, но и не имѣемъ никакихъ основанiй и вовсе не желали высказывать что-либо другое. Наша цѣль была не столько дать отзывъ объ этихъ учебникахъ, сколько обсудить, или, по крайней мѣрѣ, вызвать обсужденiе принятыхъ или входящихъ въ употребленiе способовъ изложенiя болѣе трудныхъ статей гимназическаго курса алгебры.

Б. Гернъ (Смоленскъ).

ДОСТАВЛЕННЫЯ ВЪ РЕДАКЦIЮ КНИГИ И БРОШЮРЫ.

Памяти учителя. A. Kundt. † 9 (21) мая 1894 года *Д. А. Гольдгаммера*. Казань. 1894.

Лордъ Кельвинъ (серъ Вилліамъ Томсонъ). *Д. Гольдгаммера.* Казань. 1894.

Къ теоріи размѣрности электрическихъ количествъ. *Д. А. Гольдгаммера.* (Сообщено на IX съѣздѣ русскихъ естествоиспытателей и врачей). Казань. 1894.

Метеорологическое обозрѣніе. Труды метеорологической сѣти юго-запада Россіи въ 1893 году. Выпускъ VI. *А. Клоссовскаго.* Одесса. 1894.

Organisation de l'étude climatique spéciale de la Russie et problèmes de la météorologie agricole, par *A. Klossovsky*, professeur à l'université d'Odessa. Odessa. 1894.

Distribution annuelle des orages à la surface du globe terrestre, par *A. Klossovsky.* Odessa. 1894.

Историческая записка о Ровенскомъ Реальномъ Училищѣ. 1832—1889. Составилъ учитель исторіи и географіи *А. А. Анципо-Чикунскій*, по случаю празднованія 50-ти лѣтняго юбилея училища. Кіевъ. 1894.

Отчетъ и протоколы Физико-Математическаго Общества при Императорскомъ университетѣ св. Владиміра за 1893 годъ. Кіевъ. 1894.

Къ вопросу о сопротивленіи висмута перемѣнному току. *А. И. Садовскаго.* Диссертація, представленная для полученія степени магистра физики. Спб. 1894.

Наблюденія метеорологической обсерваторіи Императорскаго Казанскаго Университета, издаваемыя проф. *Д. А. Гольдгаммеромъ.* Годъ 1894. Казань. 1894.

ЗАДАЧИ.

№ 101. Показать, что если каждый изъ множителей $abcd\ldots$ есть простое число вида $4p+1$, то число разложеній такого произведенія на сумму двухъ квадратовъ равно $2^{-1}(3^n-1)$, гдѣ n есть число множителей даннаго произведенія.

А. Гольденбергъ (Спб.).

№ 102. По двумъ даннымъ сторонамъ $AC=b$ и $BC=a$ треугольника ABC и по углу α между третьей стороной и діаметромъ описанной около треугольника ABC окружности, проходящимъ черезъ вершину C, вычислить третью сторону и построить треугольникъ.

Н. Николаевъ (Пенза).

№ 103. При какихъ условіяхъ квадраты трехъ послѣдовательныхъ членовъ ариѳметической прогрессіи составятъ геометрическую прогрессію?

А. Бачинскій (Холмъ).

№ 104. Построить четыреугольникъ $ABCD$, около котораго можно описать кругъ, по данной діагонали AC и по разстояніямъ ея отъ

двухъ вершинъ четыреугольника $DE=m$ и $BF=n$, зная, что другая діагональ BD проходитъ черезъ центръ описаннаго круга.

И. Ок—чъ (Варшава).

№ 105. Рѣшить систему:

$$y:x=v:u,$$
$$x+y+u+v=15,$$
$$x^2+y^2+u^2+v^2=85,$$
$$x^3+y^3+u^3+v^3=585.$$

Я. Тепляковъ (Радомысль).

№ 106. Показать, что опредѣлитель

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}$$

равенъ $(a+b+c+d)(a+b-c-d)(a+c-b-d)(b+c-a-d)$.

П. Свѣшниковъ (Троицкъ).

№ 107. Показать, что опредѣлитель

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

равенъ $(a-b)(b-c)(c-a)$.

П. Свѣшниковъ (Троицкъ).

МАЛЕНЬКІЕ ВОПРОСЫ.

№ 10. Два поѣзда, каждый въ 30 вагоновъ, встрѣтились на разъѣздѣ, устроенномъ для пропуска поѣздовъ въ 15 вагоновъ. Какъ имъ разъѣхаться?

А. Дмитріевскій (Цивильскъ).

РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ.

№ 34 (3 сер.). Вычислить площадь прямоугольнаго треугольника, зная радіусъ вписаннаго въ него круга и внѣ вписаннаго, касающагося гипотенузы.

Пусть радіусъ круга вписаннаго есть r, внѣ вписаннаго ϱ_a, катеты треугольника b и c, его гипотенуза a, его площадь Δ. Имѣемъ очевидно

$$\Delta = \frac{(a+b+c)r}{2} \text{ и } \Delta = \frac{(b+c-a)\varrho_a}{2}.$$

Перемноживъ эти два равенства и замѣтивъ, что $a^2 = b^2 + c^2$ и $bc = 2\Delta$, получимъ

$$\Delta = r.\varrho_a.$$

К. Щиголевъ (Курскъ); *Э. Заторскій* (Могилевъ на Дн.); *Я. Блюмбергъ* (Рига); *М. Веккеръ* (Винница); *А. Варенцовъ* (Шуя); *П. Хлѣбниковъ* (Тула); *М. Селиховъ* (Полтава); *К.* и *Ѳ.* (Тамбовъ); *Я. Полушкинъ* (с. Знаменка); *С. Копровскій* (с. Дяткевичи); *И. Ходановичъ* (Кіевъ); *О. Ривошъ* (Вильна); *П. Ивановъ* (Одесса).

№ 36 (3 сер.). Показать, что числа 49, 4489, 444889, 44448889, и т. д., получающіяся каждое черезъ вписываніе числа 48 въ середину предыдущаго, суть точные квадраты.

Общій видъ чиселъ, о которыхъ говорится въ задачѣ, очевидно есть:

$$4.10^n(10^{n-1}+10^{n-2}+\cdots+1)+8.10(10^{n-2}+10^{n-3}+\cdots+1)+9=$$

$$=4.10^n\left(\frac{10^n-1}{9}\right)+8.10\left(\frac{10^{n-1}-1}{9}\right)+9=\frac{4.10^{2n}+4.10^n+1}{9}=\left(\frac{2.10^n+1}{3}\right)^2.$$

Такъ какъ 2.10^n+1 всегда дѣлится на 3 безъ остатка, то

$$\left(\frac{2.10^n+1}{3}\right)^2$$

есть цѣлое число.

Б. (ученица Муромской женской гимн.); *С. Копровскій* (с. Дяткевичи).

№ 37 (3 сер.). Какая часть воды обратится въ ледъ, если переохладить ее до $-10°$С и затѣмъ нарушить ея спокойное состояніе?

Пусть имѣемъ p килограммовъ воды, переохлажденной до $-10°$С, и пусть при указанныхъ въ задачѣ условіяхъ x килограммовъ воды обращаются въ ледъ. При этомъ освобождаются $79x$ калорій, причемъ температура всей массы быстро повышается на $10°$. Эти $79x$ калорій расходуются: 1) на повышеніе температуры x килогр. льда на $10°$, для чего потребно $0{,}5\times 10x = 5x$ калорій, ибо уд. теплота льда $=0{,}5$; 2) на повышеніе температуры $p-x$ килогр. воды на $10°$, для чего потребно $10(p-x)$ калорій, и 3) на нагрѣваніе сосуда, чѣмъ, впрочемъ, можно пренебречь, такъ какъ явленіе происходитъ весьма быстро и теплоемкость твердыхъ тѣлъ сравнительно мала. Итакъ

$$79x = 5x + 10(p-x),$$

откуда $x = {}^5/_{42}\,p$.

Я. Блюмбергъ (Рига); *А. Варенцовъ* (Рост. н. Д.); *А. П.* (Ломжа); *К.* и *Ѳ.* (Тамбовъ).

№ 38 (3 сер.). На одной десятинѣ луга паслись 32 быка. Они въ 180 дней поѣли всю бывшую первоначально на лугу траву, а равно и ту, которая вновь выростала на немъ въ эти 180 дней. На другомъ лугу въ $^1/_2$ десятины паслись 20 быковъ, которые въ 108 дней поѣли всю первоначально бывшую на немъ траву, а равно и ту, которая вновь выростала на немъ въ эти 108 дней. Сколько быковъ въ 270 дней съѣдятъ съ луга въ 600 кв. саженей траву, на немъ находящуюся, а равно и ту, которая будетъ выростать на немъ въ эти 270 дней?— Предполагается, что на всѣхъ трехъ лугахъ трава растетъ съ одинаковой силой и что каждый быкъ съѣдаетъ одно и то же количество въ одинаковое время.

NB. Рѣшить задачу ариѳметически, безъ помощи отношеній и пропорцій.

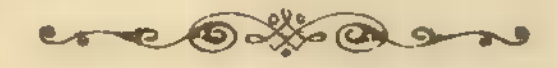
Если 32 быка поѣли всю траву и приростъ ея съ одной десятины 1-го луга въ 180 дней, то одинъ быкъ съѣлъ бы ее въ $180 \times 32 = 5760$ дней, а съ 600 кв. саженей того же луга въ $5760:4 = 1440$ дней.

Точно также найдемъ, что одинъ быкъ съѣлъ бы всю траву и приростъ ея на 600 кв. саженяхъ 2-го луга $(108 \times 20):2 = 1080$ дней. Такимъ образомъ приростъ травы на 600 кв. саженяхъ за $180 - 108 = 72$ дня далъ возможность пропитаться одному быку $1440 - 1080 = 360$ дней. На третьемъ лугу трава растетъ 270 дней, т. е. на 90 дней больше, чѣмъ на первомъ. Этотъ приростъ 90 дней былъ бы, очевидно, съѣденъ однимъ быкомъ въ $(360:72) \times 90 = 450$ дней, а вся трава на третьемъ лугу—въ $1440 + 450 = 1890$ дней. Но такъ какъ она съѣдается въ 270 дней, то быковъ было $1890:270 = 7$.

А. Варенцовъ (Рост. н. Д.); *О. Ривошъ* (Вильна).

ПОЛУЧЕНЫ РѢШЕНІЯ ЗАДАЧЪ отъ слѣдующихъ лицъ: *А. Варенцова* (Рост. н. Д.) 83, 84, 85, 86, 88 (3 сер.) и 490 (2 сер.); *Н. Македонскаго* (Рост. н. Д.) 82 (3 сер.); *Я. Теплякова* (Радомысль) 92 (3 сер.); *Д. Татаринова* (Троицкъ) 72, 82 (3 сер.); *А. Медвѣдя* (Иван.-Вознес.) 81, 82, 83, 85 (3 сер.); *Г. Легошина* (с. Знаменка) 86 (3 сер.), 166 (2 сер.) и 265 (1 сер.); *П. Иванова* (Одесса) 29, 53, 56, 66 (3 сер.); *Н. Андрикевича* (Очаковъ) 79, 83 (3 сер.); *И. Никольскаго* (Очаковъ) 79, 83 (3 сер.); *Д. Сканави* (Рост. н. Д.) 82 (3 сер.); *С. Бабанской* (Тифлисъ); 27, 51, 56, 81, 82 (3 сер.); *П. Бѣлова* (с. Знаменка) 92 (3 сер.), 546 (1 сер.); *С. Адамовича* (с. Спасское) 81, 82, 83, 85 (3 сер.), 6 (мал. вопр.); *А. Герасимова* (Кременчугъ) 89, 92 (3 сер.); *А. Бачинскаго* (Холмъ) 76, 88, 91 (3 сер.).

ПРОПУЩЕНЫ въ спискахъ лицъ, рѣшившихъ задачи: № 30 3-ей сер. (№ 193 „Вѣстника") фамиліи гг. *С. Д—цева* (Москва), *О. Ривоша* (Вильна) и *П. Иванова* (Одесса). №№ 27 и 28 3-ей сер. (№ 195 „Вѣстн.")—*С. Д—цева* (Москва); № 23 3-ей сер. (№ 195 „Вѣстн.") — *О. Ривоша* (Вильна); № 381 2 сер. (№ 194 „Вѣстн.") — *С. Адамовича* (с. Спасское).



Редакторъ-Издатель **Э. К. Шпачинскій.**

Дозволено цензурою. Одесса, 24-го Октября 1894 г.

„Центральная типо-литографія", уг. Авчинникова пер. и Почтовой ул., д. Болгарова.

120 лѣтъ спустя Picard способомъ тріангуляціи нашелъ цифру 57060 т. Послѣдній, изъ боязни, чтобъ не затерялся образецъ туаза, измѣрилъ въ туазахъ длину секунднаго маятника въ Парижѣ (grand Châtelet de Paris). Въ началѣ этого столѣтія Méchain, Delambre, Biot и Arago измѣрили дугу меридіана между Дюнкирхеномъ и Барцелоной (по способу тріангуляціи).

Projections brillantes observées sur le terminateur de la planète Mars. *W. Campbell.* **Même sujet. Montagnes sur Mars.** *W. Campbell.* Приближающаяся оппозиція Марса весьма удобна для изученія поверхности планеты. Среди вопросовъ, подлежащихъ разрѣшенію, особенно интересенъ одинъ. Скіапарелли часто замѣчалъ на поверхности Марса пятна, блескъ которыхъ увеличивался по мѣрѣ приближенія ихъ къ краю. Наблюденія другихъ астрономовъ (Terby въ 1888 г, Keeler, Holden, Schaeberle, Hussey, Campbell въ 1890 и 92) показали, что эти пятна часто бываютъ видимы *внѣ* освѣщенной части планеты, недалеко отъ терминатора, т. е. линіи, отдѣляющей освѣщенную часть отъ неосвѣщенной. Campbell склоненъ считать эти блестящія пятна вершинами горъ, расположенныхъ въ неосвѣщенной части недалеко отъ терминатора. Если для разстоянія пятна отъ терминатора взять наибольшую изъ наблюденныхъ величинъ (0,2''), то вычисленіе даетъ для высоты горы, освѣщенная вершина которой могла бы быть видимой съ земли, цифру 3,04 кил. Нѣтъ ничего невѣроятнаго въ томъ, что на Марсѣ могутъ быть горы такой высоты и что при увеличеніяхъ, находящихся въ распоряженіи у астрономовъ, онѣ могутъ быть видимы. Весьма вѣроятно, что вершины горъ покрыты снѣгомъ, чѣмъ и объясняется ихъ блескъ. То же обстоятельство, что онѣ бываютъ видимы не всегда, вѣроятно находится въ зависимости отъ временъ года на Марсѣ. Что это горы, а не облака, какъ думаютъ нѣкоторые (Pickering), слѣдуетъ изъ того, что онѣ имѣютъ весьма постоянный видъ, бываютъ видимы въ однихъ и тѣхъ же мѣстахъ планеты.

Saturne. Наблюденія надъ Сатурномъ, произведенныя въ обсерваторіи Juvisy (за іюнь 1894), въ Барцелонѣ, въ обсерваторіи Франц. Астр. Общ. Въ заключеніе помѣщены результаты наблюденій Stanley Williams'a, изъ которыхъ слѣдуетъ, что различныя зоны Сатурна вращаются съ различной скоростью: между $+17^0$ и 37^0 кроноцентрической широты скорость = 10 ч. 14 м. 29,07 сек. ± 0,27 с. между 45^0 и 140^0 долготы, и 10 ч. 15 м. 0,74 сек. ± 0,56 с. между 175^0 и 340^0 долготы, между тѣмъ какъ между 340^0 и 45^0 долготы не было области съ промежуточной скоростью. Между $+6^0$ и -2^0 кроноц. шир. скорость = 10 ч. 12 м. 59,36 сек. ± 0,27 с. между 0^0 и 140^0 долготы, въ то время какъ между 140^0 и 360^0 долг. скорость = = 10 ч. 12 м. 45,8 с.

Sur la forme des satellites de Jupiter. *E. Barnard.* Третій спутникъ Юпитера на фонѣ неба кажется круглымъ, проектируясь же на дискъ планеты иногда кажется не симметричнымъ, продолговатымъ. Barnard, наблюдая этого спутника при помощи большого экваторіала въ обсерваторіи Lick'a, нашелъ объясненіе этого явленія: у спутника часть поверхности сѣроватаго цвѣта и когда эта часть проектируется на сѣроватую же часть Юпитера, то бываетъ видима только свѣтлая часть спутника, почему онъ и кажется какъ бы съ выемкой. Наблюденія даютъ поводъ подозрѣвать, что періодъ вращенія спутника около оси не равенъ періоду вращенія около Юпитера.

Dimensions des petites planètes. *E. Barnard.* Съ помощью той же трубы при увеличеніи въ 1000 разъ Barnard измѣрилъ діаметры нѣкоторыхъ малыхъ планетъ и получилъ слѣд. цифры:

Церера	— 964 кил.	± 47 кил.
Паллада	440 „	± 19 „
Веста	382 „	± 24. „

La planète Vénus étoile du matin et du soir le même jour. *E. Vimont.* Такіе случаи, когда Венеру можно наблюдать въ одинъ и тотъ же день утромъ и вечеромъ, представлялись 5-го марта 1830 г., 2 марта 1838, 28-го февраля 1846 г., 26 февраля 1854 г., 23 февраля 1862, 21 февраля 1870 г., 19 февраля 1878, 16 февраля 1886 и 14 февраля 1894 г., т. е. приблизительно черезъ каждые 8 л; это потому, что въ 2922 дня

планета совершаетъ почти ровно 13 звѣздныхъ оборотовъ и слѣд. къ концу каждаго такого періода находится по отношенію къ намъ въ тѣхъ же условіяхъ.

Nouvelles de la science. Variétés.

К. Смоличъ (Умань).

БИБЛІОГРАФИЧЕСКІЙ ЛИСТОКЪ
НОВѢЙШИХЪ РУССКИХЪ ИЗДАНІЙ.

Аннэ, Ж. П. Практическое руководство къ устройству электрическаго освѣщенія и уходу за нимъ. Съ 129 рис. въ текстѣ Пер. съ франц. подъ редакціей П. И. Мальцова. Съ приложеніемъ таблицъ числовыхъ и графическихъ для разсчета электрическихъ проводовъ А. van Muyden'a, исправлен. и дополненныхъ А. С. Свинарскимъ. Москва. 1894 Ц. 1 р. 50 к.

Бахметьевъ, П., проф. Приспособляемость молекулъ (Отд. отт. изъ журнала „Вѣстникъ Опытной Физики в Элементарной Математики"). Одесса. 1894.

Въ память Лавуазье. Рѣчи проф. Н. Д. Зелинскаго, И. А. Каблукова и проф. И. М. Сѣченова, произнесенныя въ публичномъ засѣданіи отдѣленія химіи Имп. общества любителей естествознанія, антропологіи и этнографіи въ Москвѣ, въ день столѣтней годовщины смерти Лавуазье 26-го апрѣля (8-го мая) 1894 года. Съ портретомъ Лавуазье. Изд. отдѣленія химіи. Москва. 1894.

Граве, П. П., прив.-доц. Имп. Казанск. униврес. О геометрическомъ представленіи эллиптическихъ интеграловъ и функцій. Казань. 1894.

Записки Имп. академіи наукъ. Томъ 76-й (Электрометрическія изслѣдованія въ области физіологіи. Томъ 1-й (Общая часть). Д-ръ А. Ѳеоктистовъ). Спб. 1894. Ц. 8 р.

Каблуковъ, И. А. Работы Лавуазье по физикѣ. Рѣчь, произнесенная 26 апрѣля (8 мая) 1894 г. въ столѣтнюю годовщину дня смерти Лавуазье въ торжественномъ засѣданіи отдѣленія химіи общества любителей естествознанія, антропологіи и этнографіи, состоящаго при Имп. Московскомъ университетѣ. Москва.

Крапоткинъ, Н. П. Курсъ двойной бухгалтеріи. Теорія. Астрахань. 1894.

Раевскій, Н. Ботаника для реальныхъ училищъ. Изд. 3-е, исправленное, съ 329 рис. Спб. 1894.

Фолькманъ, Ф. А. О гидратахъ іодистаго и бромистаго желѣза. Казань. 1894

Бобынинъ, В. В., прив.-доц. Имп. моск. унив Опыты математическаго изложенія логики. Выпускъ II. Изд. редакціи журнала „Физико-Математическія науки въ ихъ настоящемъ и прошедшемъ". Москва. 1894. Ц. 50 к.

Деминевъ, В. М., телегр. техникъ. Краткій курсъ электрической телеграфіи по программѣ техническихъ желѣзнодорожныхъ училищъ. Съ отдѣльнымъ атласомъ чертежей. Изд. учебнаго отдѣла Министерства Путей Сообщенія. Спб. 1894.

Зелинскій, Н. Д. Заслуги Лавуазье въ области химіи. Рѣчь, произнесенная 26-го апрѣля (8-го мая) 1894 г. въ столѣтнюю годовщину дня смерти Лавуазье въ торжественномъ засѣданіи отдѣленія химіи общества любителей естествознанія, антропологіи и этнографіи, состоящаго при Имп. московскомъ университетѣ. Москва. 1894.

Карамзинъ, Г. О температурѣ воздуха въ селѣ Полибинѣ. Спб. 1894.

Наблюденія тифлисской физической обсерваторіи за 1892 годъ, издаваемыя И. Мильбергомъ. Тифлисъ. 1894.

Празднованіе Имп. Казанскимъ университетомъ столѣтней годовщины дня рожденія Н. И. Лобачевскаго. 1793—1893. Казань. 1894.

Сборникъ статей по фотографіи и ея приложеніямъ. Труды V отдѣла (Извлечено изъ „Записокъ Имп. русскаго техническаго общества" за 1893 г.). Спб. 1894. Ц. 1 р.

Метеорологическій сборникъ, издаваемый Имп. Академіею Наукъ. Томъ IV. Спб. 1894 Ц. 7 р. 60 к.

ОБЗОРЪ НАУЧНЫХЪ ЖУРНАЛОВЪ.

MATHESIS.

1894. — № 5.

Sommation des puissances semblables des n premiers nombres entiers, par M. *E. Barbette*. Обозначимъ черезъ $S_{p,n}$ сумму p-хъ степеней n первыхъ цѣлыхъ чиселъ; тогда, какъ извѣстно,

$$\sum_{p=1}^{p=m} C_p^{m+1} \cdot S_{m-p+1,n} = (n+1)[(n+1)^m - 1];$$

слѣдов. $S_{m,n}$ выражается ф-цiей $m+1$ степени отъ n. Полагая въ этой формулѣ последовательно $m = 1, 2, 3, \ldots$, авторъ находитъ такiя ф-цiи для значенiй m отъ 1 до 11 включительно; всѣ онѣ имѣютъ видъ

$$S_{m,n} = \frac{a_{m+1}\, n^{m+1} + a_m\, n^m + a_{m-1}\, n^{m-1} + \cdots + a_2 n^2 + a_1 n}{a},$$

гдѣ $a, a_1, a_2, \ldots, a_{m+1}$ суть нѣкоторыя цѣлыя числа; напр.

$$S_{5,n} = \frac{2n^6 + 6n^5 + 5n^4 - n^2}{12},$$

$$S_{6,n} = \frac{6n^7 + 21n^6 + 21n^5 - 7n^3 + n}{42}.$$

Далѣе авторъ составляетъ таблицу изъ n строкъ и n столбцовъ; въ каждомъ столбцѣ, сверху внизъ, онъ пишетъ произведенiя

въ 1-мъ столбцѣ $1^r \times p^k$, гдѣ $p = 1, 2, 3, \ldots, n$

" 2-мъ " $2^r \times p^k$ " "

" 3-мъ " $3^r \times p^k$ " "

. . . .

" n-мъ " $n^r \times p^k$ " "

и опредѣляетъ сумму S всѣхъ чиселъ этой таблицы. Такъ какъ сумма чиселъ p-й строки $= 1^r \cdot p^k + 2^r \cdot p^k + 3^r \cdot p^k + \cdots + n^r \cdot p^k = p^k \cdot S_{r,n}$, то

$$S = S_{r,n} \cdot S_{k,n}.$$

Съ другой стороры, сумма p чиселъ p-го столбца $= p^r \cdot S_{k,p}$, а сумма p чиселъ p-й строки $= p^k S_{r,p}$; слѣдов. сумма чиселъ p-го столбца и p-й строки, до пересѣченiя ихъ, $= p^r S_{k,p} + p^k S_{r,p} - p^r \cdot p^k$; поэтому

$$S = \sum_{p=1}^{p=n} (p^r S_{k,p} + p^k S_{r,p} - p^{r+k}).$$

Изъ сравненiя полученныхъ двухъ ф-лъ для S авторъ получилъ слѣдующую общую формулу:

$$S_{r,n} \cdot S_{k,n} = \sum_{p=1}^{p=n} (p^r S_{k,p} + p^k S_{r,p} - p^{r+k}). \qquad (A)$$

Положивъ здѣсь $r = 1$ и давая для k значенiя $1, 2, 3, \ldots, k$, получимъ k ур-нiй, изъ которыхъ опредѣляются $S_{3,n}, S_{4,n}, S_{5,n}, \ldots, S_{k+2,n}$ черезъ $S_{1,n}$ и $S_{2,n}$. Вообще изъ формулы (A) можно опредѣлить $S_{m,n}$, задавая для r и k такiя цѣ-

лыя значенія, чтобы $k + r + 1 = m$. Авторъ составилъ такимъ образомъ таблицу ф-лъ для m отъ 1 до 12 включительно. Для одного и того-же значенія m при различныхъ значеніяхъ r и k получаются различныя ф-лы; напр., для $m = 7$,

$$\text{при } r = 2,\ k = 4, \qquad 16\,S_{7,n} = 30.S_{2,n}.S_{4,n} - 15.S_{5,n} + S_{3,n},$$

$$\text{„ } r = 3,\ k = 3, \qquad S_{7,n} = 2.S_{3,n}^2 - S_{5,n}.$$

Простѣйшая изъ этихъ ф-лъ есть $S_{3,n} = S_{1,n}^2$. По замѣчанію автора, для опредѣленія $S_{2x+1,n}$ черезъ $S_{1,n}$ удобнѣе брать для k и r нечетныя значенія; въ случаѣ же четнаго x полагать $r = k = x$. Для вычисленія $S_{2x,n}$ рекомендуется полагать $r = x - 1$, $k = x$.

Редакція жур. Math. замѣчаетъ, что ст. M. Barbette'a отчасти служитъ отвѣтомъ на вопросъ № 28 въ L'intermédiaire: „Извѣстно, что $S_{3,n} = S_{1,n}^2$; нѣтъ-ли другихъ равенствъ того-же вида?“

Quelques systèmes de tiges articulées, par M. R. *Bricard*. Если въ системѣ (I) трехъ стержней OABO', соединенныхъ шарнирами въ A и B, точки O и O' неподвижны, то, положивъ $OA = O'B = r$, $AB = 2d$, $OO' = 2a$, $\angle AOO' = \varphi$, $\angle BO'O = \psi$, получимъ:

$$[2a - r(\cos\varphi + \cos\psi)]^2 + r^2(\sin\varphi - \sin\psi)^2 = 4d^2,$$

откуда

$$a^2 - d^2 - 2ar\cos\frac{\varphi+\psi}{2}\cos\frac{\varphi-\psi}{2} + r^2\cos^2\frac{\varphi+\psi}{2} = 0. \qquad (1)$$

Въ другой системѣ (II) OA_1MB_1O' изъ четырехъ стержней, съ неподвижными точками O и O', положимъ $OA_1 = O'B_1 = R$, $MA_1 = MB_1 = D$, $OO' = 2a$, $\angle A_1OO' = \varphi$, $\angle B_1O'O = \psi$ и найдемъ условіе, при которомъ шарниръ M чертитъ прямую MI, перпендикулярную къ OO'. Обозначивъ IM черезъ x, получимъ

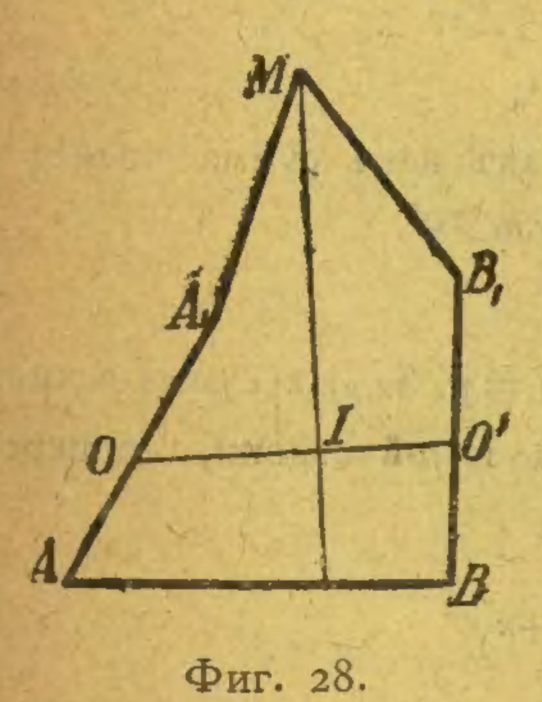
$$(x - R\sin\varphi)^2 + (a - R\cos\varphi)^2 = D^2 = (x - R\sin\psi)^2 + (a - R\cos\psi)^2;$$

отсюда, послѣ преобразованій и исключенія x, найдемъ

$$a^2 - 2aR\cos\frac{\varphi+\psi}{2}\cos\frac{\varphi-\psi}{2} + (R^2 - D^2)\cos^2\frac{\varphi+\psi}{2} = 0 \qquad (2)$$

Ур-нія (1) и (2) тождественны при

$$\frac{a^2-d^2}{a^2} = \frac{r}{R} = \frac{r^2}{R^2-D^2};$$



Фиг. 28.

отсюда получается весьма общій способъ для черченія прямой при посредствѣ пяти стержней, представляющихъ соединеніе двухъ разсмотрѣнныхъ системъ, напр. какъ на фиг. 28.

Разсмотримъ еще систему (III) изъ пяти стержней OA, AP, PB, BO' и PI, съ неподвижными точками O, I, O', лежащими на одной прямой. Положивъ $IO = IO' = IP = a$, $OA = AP = PB = BO' = R_1$, $\angle AOI = \varphi$, $\angle BO'I = \psi$ и замѣтивъ, что $IA \perp IB$, получимъ:

$$\frac{R_1\sin\varphi}{a - R_1\cos\varphi}\cdot\frac{R_1\sin\psi}{a - R_1\cos\psi} = 1,$$

откуда

$$a^2 - R_1^2 - 2aR_1\cos\frac{\varphi+\psi}{2}.\cos\frac{\varphi-\psi}{2} + 2R_1^2\cos^2\frac{\varphi+\psi}{2} = 0. \qquad (3)$$

Ур-ніе это тождественно со (2), если

$$\frac{a^2 - R_1^2}{a^2} = \frac{R_1}{R} = \frac{2R_1^2}{R^2 - D^2}.$$